

**Univerzitet Crne Gore
Prirodno-matematički fakultet**

Džordža Vašingtona b.b.
1000 Podgorica, Crna Gora

tel: +382 (0)20 245 204

fax: +382 (0)20 245 204

www.pmf.ac.me

Broj: 2025/01-584/2

Datum: 20.03.2025

UNIVERZITET CRNE GORE

SENATU

CENTRU ZA DOKTORSKE STUDIJE

U prilogu akta dostavljamo D1 Mr Vladimira Ivanovića sa sjednice Prirodno-matematičkog fakulteta održane 18.03.2025. godine

S poštovanjem



Dekan,
Prof. dr Miljan Bigović



**Univerzitet Crne Gore
Prirodno-matematički fakultet**

Džordža Vašingtona b.b.
1000 Podgorica, Crna Gora

tel: +382 (0)20 245 204

fax: +382 (0)20 245 204

www.pmf.ac.me

Broj: 2025/01-584/1

Datum: 20.03.2025

Na osnovu člana 64 Statuta Univerziteta Crne Gore a u vezi sa članom 35 stav 3 Pravila doktorskih studija, Izveštaja komisije za ocjenu polaznih istraživanja broj 2025/01-584 od 17.03.2025.godine, Vijeće je donijelo

O D L U K U

I

Usvaja se Izveštaj komisije za ocjenu polaznih istraživanja kandidata MSc Vladimira Ivanovića.

II

Odluka se dostavlja Centru za doktorske studije Univerziteta Crne Gore.

 **DEKAN**
Prof. dr Miljan Bigović

OCJENA PRIJAVE DOKTORSKE TEZE I KANDIDATA

OPŠTI PODACI O DOKTORANDU	
Titula, ime i prezime	MSc Vladimir Ivanović
Fakultet/Institut	Prirodno-matematički fakultet
Studijski program	Matematika
Broj indeksa	2/2020
Podaci o magistarskom radu	Kohomološki prsteni GKM grafova , Algebarska topologija, PMF, 2020, 10
NASLOV PREDLOŽENE TEME	
Na službenom jeziku	Z_2 -homologije prostora orbita za $G_{n,2}/T^n$
Na engleskom jeziku	Z_2 -homology of the orbit space $G_{n,2}/T^n$
Datum prihvatanja teme i kandidata na sjednici Vijeća organizacione jedinice	18.03.2025. god.
Naučna oblast doktorske disertacije	Matematika/Algebarska topologija
Za navedenu oblast matični su sljedeći fakulteti	
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Podgorica	
A. IZVJEŠTAJ SA JAVNE ODBRANE POLAZNIH ISTRAŽIVANJA DOKTORSKE DISERTACIJE	
Javna odbrana polaznih istraživanja doktorske disertacije kandidata Vladimira Ivanovića pod nazivom "Z_2-homologije prostora orbita za $G_{n,2}/T^n$" održana je 03. 03. 2025. godine sa početkom u 10 sati pred Komisijom u sastavu: dr Rade Živaljević, naučni savetnik Matematičkog instituta SANU, dr Đorđe Baralić, viši naučni saradnik Matematičkog instituta SANU, dr Svetlana Terzić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta UCG. S obzirom da se dr Rade Živaljević i dr Đorđe Baralić nalaze u Beogradu, odbrana je organizovana u hibridnoj formi koristeći zoom platformu. Na početku su članovi komisije upoznati sa podacima o kandidatu Vladimir Ivanoviću koji su se odnosili na to da je u toku dosadašnjih doktorskih studija uspješno položio sve predmete predviđene planom doktorskih studija. Pomenuti predmeti obuhvataju dva obavezna predmeta i tri izborna predmeta, koji su oformljeni na način da kroz njih kandidat ovlada neophodnim teorijama i tehnikama za dalji rad na doktorskoj tezi. Nakon toga je kandidat Vladimir Ivanović izložio osnove polaznih istraživanja na tezi u trajanju približno 40 minuta. U uvodnom dijelu je kandidat formulisao cilj rada na tezi i kroz prezentaciju izložio dosadašnje relevantne rezultate, a zatim I plan istraživanja u okviru teze i dobijene i očekivane rezultate. Nakon izlaganja su članovi komisije postavljali pitanja vezana za planirane rezultate teze, kao i komentarisali problematiku teze u kontekstu srodnih problema, o čemu je napisano u prilogu. Komisija je jednoglasno donijela odluku da je kandidat uspješno odbranio predloženu temu doktorskih istraživanja i njene ciljeve, kao i da je predložena tema aktuelna i podobna kao tema rada na doktorskoj disertaciji.	

B. OCJENA PRIJAVE TEME DOKTORSKE DISERTACIJE
B1. Obrazloženje teme

Predložena tema se odnosi na izučavanje topologije prostora orbita Grasmanovih mnogostrukosti u odnosu na kanonsko dejstvo kompaktnog torusa. Grasmanove mnogostrukosti predstavljaju jedan od osnovnih objekata za izučavanje problema koji su na dodiru algebarske geometrije i algebarske topologije. Predmet izučavanja torusne geometrije su algebarske mnogostrukosti koje se dobijaju kao zatvorenje jedne orbite algebarskog torusa. Ekvivarijantna struktura ovih mnogostrukosti u odnosu na dejstvo maksimalnog kompaktnog torusa, koji je sadržan u algebarskom torusu, može biti efektivno opisana pomoću kombinatorne strukture momentnog politopa i karakteristične funkcije. Pitanje koje se prirodno nameće u ovom kontekstu jeste proučavanje ekvivarijantne topologije algebarskih mnogostrukosti u odnosu na dejstvo kompaktnog torusa koje se proširuje do dejstva algebarskog torusa, pri čemu familija algebarskih torusnih orbita daje, na neki način, dobru stratifikaciju same mnogostrukosti. Prvi netrivialni primjeri jesu kompleksne Grasmanove mnogostrukosti $G_{n,2}$, koja predstavljaju dvodimenzionalne kompleksne potprostore u C^n , u odnosu na kanonsko dejstvo kompaktnog torusa T^n . Kompleksnot izučavanja topologije odgovarajućeg prostora orbita $X_n = G_{n,2}/T^n$ je u direktnoj vezi sa složenošću dejstva kompaktnog torusa, koja predstavlja broj $d=2(n-2)-(n-1)=n-3$. Torusne i kvazitorusne mnogostrukosti imaju složenost dejstva $d=0$. Tema rada je izučavanje i eksplicitan opis homoloških grupa sa Z_2 koeficijentima prostora orbita $X_n = G_{n,2}/T^n$, s obzirom da homološke grupe predstavljaju jedne od fundamentalnih topoloških invarijanti. U radu na ovoj tematici baziraćemo se na osnovnim pojmovima i tehnikama teorije homologija, i na rezultatima radova Buchstaber i Terzić u kojima je konstruisan model za ovaj prostor orbita i detaljno opisani njegovi strukturni elementi.

B2. Cilj i hipoteze

Glavni ciljevi disertacije su da se izvedu i dokažu sledeća tvrđenja:

- 1) Prostor parametara F_ω komore u hipersimpleksu je kompaktifikacija prostora parametara glavnog strata F_n i pokazujemo da su homološke grupe za F_ω generisane naraštajima u kompaktifikaciji prostora F_n do F_ω .
- 2) Za homologije najvećih dimenzija važi: $H_{3n-7}(X_n, Z_2) \simeq Z_2$ i $H_{3n-8}(X_n, Z_2) = 0$.
- 3) Homološke grupe dimenzije manje od $n - 1$ su određene lancima na granici $Y_n = \widehat{\mu}^{-1}(\partial\Delta_{n,2})$.
- 4) Neka je c lanac na X_n tako da je $\dim c = n - 1 + 2k + 1$ gdje je $\widehat{\mu}(\partial c) \in \partial\Delta_{n,2}$ i $1 \leq k < n - 3$. Tada je lanac c homologan lancu c' tako da $\widehat{\mu}(c') \subset \partial\Delta_{n,2}$.
- 5) Neka je c cikl na X_n dimenzije $\dim c = n - 1 + 2k$, $1 \leq k \leq n - 3$. Tada je c homologan ciklu c' oblika:

$$c' = c'_0 + c'_1,$$
gdje su c'_0 i c'_1 ciklovi tako da $c'_0 \in \widehat{\mu}^{-1}(\Delta_{n,2}^\circ)$ i $c'_1 \in \widehat{\mu}^{-1}(\partial\Delta_{n,2}^\circ)$
- 6) Izračunavanje homoloških grupa sa Z_2 koeficijentima za prostor orbita X_5 ,
- 7) Izračunavanje homoloških grupa sa Z_2 koeficijentima za prostor orbita X_6 ,
- 8) Opisati strukturu mreže, odnosno rešetke aranžmana hiperravni $\mathcal{G}(n, 2)$ koji daje dopustive politope, odnosno razlaganje na komore hipersimpleksa $\Delta_{n,2}$.

B3. Metode i plan istraživanja

U disertaciji se izučavaju homologije prostor orbita X_n sa Z_2 -koeficijentima. Polazi se od modela (U_n, p_n) za $G_{n,2}/T^n$ koji je konstruisan u [2], gdje je $U_n = \Delta_n \times \mathcal{F}_n$ za glatku mnogostrukost $\mathcal{F}_n$, koja se naziva univerzalni prostor parametara, i $p_n: U_n \rightarrow X_n$ je neprekidna projekcija. Prostor X_n je količnik prostor za U_n definisan preslikavanjem p_n . Osnovni rezultat, koji je sadržan u konstrukciji ovog modela, a koja je data u radu Buchstaber-Terzić, i koji se koristi u našem istraživanju, sastoji se u tome da se X_n može predstaviti kao disjunktna unija prostora $\{C_\omega \times F_\omega\}$. Ovdje su C_ω komore hipersimpleksa $\Delta_{n,2}$, koje odgovaraju njegovoj dekompoziciji datoj svim mogućim presjecima matroida, tj. dopustivih politopa. Prostori F_ω su prostori orbita za $\mu^{-1}(C_\omega)$ u odnosu na kanonsko dejstvo algebarskog torusa $(C^*)^n$, gde je $\hat{\mu}: G_{n,2}/T^n \rightarrow \Delta_{n,2}$ preslikavanje indukovano standardnim preslikavanjem momenta $\mu: G_{n,2} \rightarrow \Delta_{n,2}$. Odgovarajuća ćelijska dekompozicija prostora X_n je data ćelijskom dekompozicijom svakog prostora F_ω . Karakteristična preslikavanja su data karakterističnim preslikavanjima ćelijske dekompozicije $\Delta_{n,2}$ na komore C_ω , karakterističnim preslikavanjima ćelijske dekompozicije F_ω i preslikavanjima koja definišu zatvorenje strata u $G_{n,2}$. Naime, u Gelfand i Serganova su pokazali da je zatvorenje bilo kojeg stratuma W_σ unija strata $W_{\sigma'}$ za neko $\sigma' \subset \sigma$. S druge strane važi da je $\mu(W_\sigma) = \text{int}(P_\sigma)$, što je relativna unutrašnjost politopa $P_\sigma \subset \Delta_{n,2}$, nazvanog dopustivi politop. Konkretno, ako je $P_{\bar{\sigma}}$ strana maksimalne dimenzije dopustivog politopa P_σ , tada stratum $W_{\bar{\sigma}}$, za koji važi $\mu(W_{\bar{\sigma}}) = \text{int}(P_{\bar{\sigma}})$, pripada granici stratuma W_σ . Pored toga, u radovima Buhštaber-Terzić dokazano je da postoji neprekidna sirjekcija $\eta_{\sigma, \bar{\sigma}}: F_\sigma \rightarrow F_{\bar{\sigma}}$. Ako C_ω ima stranu maksimalne dimenzije $C_{\bar{\omega}}$, tada važi $C_{\bar{\omega}} = \bigcap P_{\bar{\sigma}}$ za strane maksimalne dimenzije $P_{\bar{\sigma}}$ politopa P_σ , gde je $\sigma \in \omega$. Posljedično ćemo pokazati da neprekidna sirjekcija $\eta_{\sigma, \bar{\sigma}}$ daje neprekidnu sirjekciju $\eta_{\omega, \bar{\omega}}: F_\omega \rightarrow F_{\bar{\omega}}$.

Univerzalni prostor parametara $\mathcal{F}_n$ se definiše za dejstvo torusa T^k na glatku mnogostrukost M^{2n} , a detaljno izučen za dejstvo torusa T^n na $G_{n,2}$ u radovima Buchstaber-Terzić. Konkretno, dokazano je da je $\mathcal{F}_n$ glatka mnogostrukost, difeomorfna prostoru modula $\mathcal{M}_{0,n}$ stabilnih glatkih krivih roda n sa n fiksiranih različitih tačaka. Štaviše, dokazano je da postoji neprekidna sirjekcija $p_\omega: \mathcal{F}_n \rightarrow F_\omega$ za svako ω . Ovo preslikavanje indukuje relacije na generatorima homoloških grupa prostora F_ω sa relacija na generatorima homoloških grupa prostora $\mathcal{F}_n$. Generatori homoloških grupa za $\mathcal{F}_n$, kao i njihove relacije, određeni su u radu Keel-a.

Složenost proučavanja prostora orbita M^{2n}/T^k i njihove homološke strukture prati složenost dejstva torusa. Homologija kvazitorusnih mnogostrukosti M^{2n}/T^n , koje pripadaju klasi mnogostrukosti sa torusnim dejstvom složenosti nula, određena je kombinatorikom momentnog politopa P^k . Homološke grupe sa cjelobrojnim koeficijentima prostora orbita X_4 , koji predstavlja primjer dejstva torusa složenosti 1 su poznate. Takođe su poznate cjelobrojne homološke grupe široke klase prostora orbita dejstva torusa složenosti 1, s obzirom da su ovi prostori sfere. Homološke grupe sa cjelobrojnim koeficijentima prostora orbita X_5 , koji predstavlja primjer dejstva torusa složenosti 2, izračunate su u radovima Buchstaber-Terzić i Suessa.

Plan rada se sastoji od induktivnog opisa strukture ciklova X_n za proizvoljno n i izučavanja načina za izračunavanje homoloških grupa za X_n sa Z_2 -koeficijentima.

Plan je i da se dobijeni rezultati primijene za izračunavanje homoloških grupa sa Z_2 -koeficijentima prostora X_5 , koristeći gore pomenute generatore za homološke grupe prostora F_ω i na njima indukovane relacije iz homoloških grupa prostora $\mathcal{F}_5$. Ovaj pristup se razlikuje od pristupa korišćenih do sada koji su poznati autoru. Pored toga, plan je i da se eksplicitno opišu homološke grupe sa Z_2 -koeficijentima za X_6 , koje su do sada nijesu bile poznate. Prostor X_6 je primjer torusnog dejstva složenosti 3.

Poznat je i kombinatorni opis dopustivih politopa hipersimpleksa $\Delta_{n,2}$ preko aranžmana hiperravni $\mathcal{G}(n, 2)$. U okviru toga je pokazano da rešetka $L(\mathcal{G}(n, 2))$ ovog aranžmana daje dekompoziciju za $\Delta_{n,2}$ koja je nazvana dekompozicija na komore i svaki elemenat ovakve dekompozicije se naziva komora C_ω . Ovakva dekompozicija se poklapa sa dekompozicijom na komore koja je definisana preko dopustivih politopa. Kako se prostor X_n može predstaviti kao disjunktna unija prostora $\{C_\omega \times F_\omega\}$, rezultati o strukturi ove rešetke imaju direktan uticaj na bolje razumijevanje topologije našeg prostora X_n . Mi ćemo raditi na izučavanju ovakve rešetke uz pomoć opštih metoda enumerativne kombinatorike.

B4. Naučni doprinos

Prvi doprinos se sastoji u opisu ciklova prostora orbita X_n u slučaju proizvoljnog n , koji bi vodili do uspješne primjene predstavljene metode za eksplicitno izračunavanje homoloških grupa za X_n sa Z_2 -koeficijentima. Drugi doprinos se sastoji u opisu homoloških grupa univerzalnog prostora parametara i prostora parametara koji odgovaraju komorama u terminima virtuelnih prostora parametara koji su određeni dopustivim politopima koji definišu kameru.

Treći doprinos se sastoji u eksplicitnom određivanju grupa homologija sa Z_2 -koeficijentima za prostore orbita X_5 i X_6 . Takođe očekuje se i doprinos koji se odnosi na opis rešetke $L(G(n, 2))$ specijalnog aranžmana hiperravni koji opisuje dopustive politope. Rešetka $L(G(n, 2))$ ovog aranžmana u presjeku sa hipersimpleksom $\Delta_{n,2}$ daje pomenutu dekompoziciju za $\Delta_{n,2}$ na komore. Zbog toga se očekuje da izučavanje ove rešetke može da pruži dodatne kombinatorne rezultate koji će omogućiti dalje izučavanje topologije prostora X_n .

B5. Finansijska i organizaciona izvodljivost istraživanja

Predstavljeno istraživanje u pogledu materijalnih i finansijskih resursa ne iziskuje velika sredstva. Vremenski je adekvatno isplanirano i realno sprovodljivo. Imajući u vidu da su vremenski, tehnički, materijalni i finansijski uslovi adekvatni, istraživanje se ocenjuje kao izvodljivo u projektovanom periodu.

Mišljenje i prijedlog komisije

Kandidat Vladimir Ivanović je jasno i matematički tačno predstavio problematiku istraživanja na tezi, kao i očekivane rezultate. Kandidat je u toku odbrane polaznih istraživanja pokazao da je usješno ovladao pojmovima, tvrđenjima i tehnikama koje se primjenjuju u radu na definisanju problematice teze. Nakon toga je uspješno predstavio ideje i metode za rješavanje postavljenih problema, kao i način njihove primjene koji vodi ka eksplicitnim rezultatima. Komisija pozitivno ocenjuje prijavljenu temu doktorske disertacije i smatra da je kandidat pokazao znanje i potencijal za njenu realizaciju. Komisija predlaže Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta UCG da odobri nastavak rada na doktorskoj disertaciji.

Prijedlog izmjene naslova

Nema

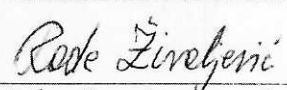
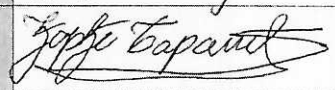
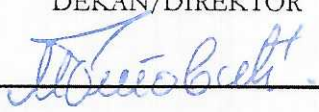
Prijedlog promjene mentora i/ili imenovanje drugog mentora

Nema

Planirana odbrana doktorske disertacije

2025, zimski semester

Izdvojeno mišljenje
Nema

Napomena		
Nema		
ZAKLJUČAK		
Predložena tema po svom sadržaju odgovara nivou doktorskih studija.	DA	NE
Tema je originalan naučno-istraživački rad koji odgovara međunarodnim kriterijumima kvaliteta disertacije.	DA	NE
Kandidat može na osnovu sopstvenog akademskog kvaliteta i stečenog znanja da uz adekvatno mentorsko vođenje realizuje postavljeni cilj i dokaže hipoteze.	DA	NE
Komisija za ocjenu podobnosti teme i kandidata		
Naučni savetnik, dr Rade Živaljević, Matematički institut SANU, Srbija		
Viši naučni saradnik, dr Đorđe Baralić, Matematički institut SANU, Srbija		
Redovni profesor, dr Sijetlana Terzić, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet Crne Gore, Crna Gora		
U Podgorici, 13.3.2025.  DEKAN/DIREKTOR 		

PRILOG

PITANJA KOMISIJE ZA OCJENU PRIJAVE DOKTORSKE TEZE I KANDIDATA	
Naučni savetnik, dr Rade Živaljević,	Da li se mogu dobiti rezultati u ovom pravcu primjenom nekih standardnih homoloških tehnika?
Naučni saradnik, dr Đorđe Baralić	Da li se na osnovu dobijenih rezultata o homološkin grupama sa Z_2 koeficijentima mogu izvesti neki rezultati sa cjelobrojnim koeficijentima? Da li se neke od predloženih metoda za računanje homoloških grupa kompleksnih Grasmanovih mnogostrukosti mogu primijeniti u slučaju orijetisanih realnih Grasmanovih mnogostrukosti? Da li se na osnovu dobijenih rezultata može izvesti neki zaključak o kohomološkim grupama, ili prstenima, sa Z_2 koeficijentima? Pitanje se naročito odnosi na prostor orbita X_6 .
Redovni profesor, dr Svjetlana Terzić	Pristup izučavanju cjelobrojnih homoloških grupa prostora X_5 predstavljen u radu Buhštaber-Terzić se zasniva na filtraciji ovog prostora i primjeni homoloških tehnika. Tehnički je zahtjevan, ali se može očekivati da sličan pristup može biti primijenjen za određivanje cjelobrojnih homologija prosotora orbita X_6. U obrazloženju je ukazano da dobijeni prostori orbita nemaju u opštem slučaju strukturu mnogostrukosti, tako da nema dualnosti između homoloških i kohomoloških grupa, pa se očekuje neki drugi pristup zadatku opisa kohomoloških grupa razmatranih prosotora orbita.
PITANJA PUBLIKE DATA U PISANOJ FORMI	
	Nema
ZNAČAJNI KOMENTARI	
Nema	

Na osnovu člana 8 stav 4, a u vezi sa članom 32a Pravila doktorskih studija, Odbor za doktorske studije, nakon sprovedenog postupka glasanja, na sjednici održanoj 27. 01. 2025. godine dao je

SAGLASNOST

I

Da se prihvati prijedlog Vijeća Prirodno-matematičkog fakulteta, broj 2024/01-2969/1 od 13. 12. 2024. godine, za imenovanje Komisije za ocjenu prijave doktorske disertacije mr Vladimira Ivanovića, u sastavu: dr Svjetlana Terzić, redovna profesorica Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore, dr Rade Živaljević, naučni savjetnik Matematičkog instituta Srpske akademije nauka i umetnosti, i dr Đorđe Baralić, viši naučni savjetnik Matematičkog instituta Srpske akademije nauka i umetnosti.

OBRAZLOŽENJE:

Odboru za doktorske studije dostavljen je prijedlog Prirodno-matematičkog fakulteta broj 2024/01-2969/1 od 13. 12. 2024. godine za imenovanje Komisije za ocjenu prijave doktorske disertacije mr Vladimira Ivanovića, u gore navedenom sastavu.

Odbor sugeriše kandidatu da jasnije naznači hipoteze u narednoj fazi rada na doktorskoj disertaciji.

Pravilima doktorskih studija propisano je da Komisija ima, po pravilu, tri člana, od kojih je jedan član mentor. Članovi komisije moraju biti iz naučne/umjetničke oblasti iz koje se doktorska teza predlaže. Uvidom u prijavu teme, zaključeno je da je predložena Komisija formirana u skladu sa Pravilima doktorskih studija.

Nakon sprovedenog postupka glasanja, od ukupno 11 članova Odbora, glasalo je 9 članova – 9 glasova **ZA**, nije bilo glasova protiv i uzdržanih, utvrđen je prijedlog kao u dispozitivu.

Broj: 01/2-518

Podgorica, 27. 01. 2025. godine



Predsjednik Odbora za doktorske studije

Prof. dr Boris Vukićević